10º FEPEG FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO
RESPONSABILIDADE SOCIAL: INDISSOCIABILIDADE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA
ISSN 1806-549 X

Autor(es): JULIANA GUIMARÃES CANÇADO, VALDOMIRO ROCHA, WARLEY FERREIRA DA CUNHA, WARLEY MENDES BATISTA, SEBASTIÃO ALVES DE SOUZA

Centros Fracamente Persistentes

Introdução

Apresentamos equações diferenciais polinomiais que tenham a origem como centro fracamente persistente, e não somente persistente, pois se assim o fosse, coincidiriam com as listadas nos Teoremas principais **A**, **B** ou **C** de [1]. Assim, dada a equação diferencial $\dot{z} = iz + F_n(z,\bar{z})$ a origem é um centro fracamente persistente se é um centro para

$$\dot{z} = iz + u\,F_n(z,\bar{z}),\ \forall u \in IR.$$

Material e métodos

Pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa.

Resultados e discussão

Um foco fraco para uma equação diferencial analítica autônoma planar pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + P(x,y) = -y + \sum_{k=2}^{n} P_k(x,y) \\ \dot{y} = \ \ x + Q(x,y) = \ \ x + \sum_{k=2}^{n} Q_k(x,y) \end{cases} \quad (1)$$

onde P_k e Q_k são polinômios homogêneos de grau k. Usando a mudança de variáveis, $z = x + iy$, temos a seguinte definição.

Definição 1. Dada a equação diferencial $\dot{z} = iz + F(z,\bar{z})$, dizemos que:

(a) A origem é um centro persistente se ela é um centro para $\dot{z} = iz + \lambda\,F(z,\bar{z}), \forall \lambda \in C.$

(b) A origem é um centro fracamente persistente se é um centro para $\dot{z} = iz + u\,F(z,\bar{z}),\ \forall u \in IR.$

A seguir, apresentamos sem demonstração a proposição que possibilitou encontrar exemplos de equações diferenciais que possuem um centro fracamente persistente na origem.

Proposição 2. Considere a equação diferencial $\dot{z} = iz + F_n(z,\bar{z})$, (2) onde F_n é um polinômio homogêneo de grau n, e defina $S_n(\theta) = e^{-i\theta}F_n(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$. Se existir $s \in IR$ tal que $\mathrm{Re}(sS'(\theta)i + S_n(\theta)) \equiv 0$, então a origem é um centro, além disso, a equação tem integral primeira do tipo Darboux, ou seja, integral primeira algébrica. A partir desta proposição, enunciaremos os resultados principais, cujas demonstrações encontra-se em $[1]$.

Teorema 3. A equação diferencial

$$\dot{z} = iz + Az^2 + Bz\bar{z},\ (3)$$

onde $A, B \in C$, $\mathrm{Im}(\bar{A}B) = 0$ e $A \neq B$, possui um centro fracamente persistente na origem.

ISSN 1806-549 X

Teorema 4. A equação diferencial

$$\dot{z} = iz + Dz^3 + Fz\bar{z}^2, \ (4)$$

onde $D, F \in C$, $\mathrm{Im}\left(\overline{D}F\right) = 0$ e $D \neq F$, possui um centro fracamente persistente na origem.

A seguir generalizaremos a expressão dada na Proposição 2 e que tem nos ajudado encontrar equações diferenciais que tem a propriedade de ter um centro fracamente persistente na origem.

Seja $F_n(z, \bar{z}) = \sum\limits_{k+l=n} A_{kl} z^k \bar{z}^l$, onde $A_{kl} \in IR$. Como,

$$S_n(\theta) = e^{-i\theta} F_n\left(e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right) = \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{-i(k-l-1)\theta},$$

derivando obtemos $S_n'(\theta) = \sum\limits_{k+l=n} A_{kl} i(k-l-1) e^{-i(k-l-1)\theta}$.

Sendo assim, a expressão da Proposição 2 é dada por

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(sS_n'(\theta)i + S_n(\theta)\right) &= \frac{1}{2}\left[sS_n'(\theta)i + S_n(\theta) + \overline{sS_n'(\theta)i + S_n(\theta)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-s\left(\sum_{k+l=n} A_{kl}(k-l-1)e^{i(k-l-1)\theta}\right) + \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{i(k-l-1)\theta} - \right. \\
&\left. - s\left(\sum_{k+l=n} A_{kl}(k-l-1)e^{-i(k-l-1)\theta}\right) + \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{-i(k-l-1)\theta}\right] \\
&\equiv 0.
\end{aligned}$$

Sendo assim, generalizamos os Teoremas 3 e 4, com o seguinte teorema:

Teorema 5. A equação diferencial

$\dot{z} = iz + F_n(z, \bar{z}) = iz + \sum\limits_{k+l=n} A_{kl} z^k \bar{z}^l$, onde $A_{kl} \in C$. E seja

$$S_n(\theta) = e^{-i\theta} F_n\left(e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right) = \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{-i(k-l-1)\theta}.$$

Temos que, as equações diferenciais polinomiais planares a seguir possuem a propriedade de ter um centro fracamente persistente na origem.

(a) para n par, temos m casos

$$1^0)\ \dot{z} = iz + A_{k,0} z^k + A_{1,k-1} z\bar{z}^{k-1},$$

$$2^0)\ \dot{z} = iz + A_{k-1,1} z^{k-1}\bar{z} + A_{2,k-2} z^2 \bar{z}^{k-2},$$

$$3^0)\ \dot{z} = iz + A_{k-2,2} z^{k-2}\bar{z}^2 + A_{3,k-3} z^3 \bar{z}^{k-3},$$

$$\vdots$$

ISSN 1806-549 X

$$\vdots$$

$$\left.(m-1)^0\right)\ \dot z = iz + A_{\frac{k}{2}+2,\frac{k}{2}-2}\, z^{\frac{k}{2}+2}\,\bar z^{\frac{k}{2}-2} + A_{\frac{k}{2}-1,\frac{k}{2}+1}\, z^{\frac{k}{2}-1}\,\bar z^{\frac{k}{2}+1},$$

$$\left.m^0\right)\ \dot z = iz + A_{\frac{k}{2}+1,\frac{k}{2}-1}\, z^{\frac{k}{2}+1}\,\bar z^{\frac{k}{2}-1} + A_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}}\, z^{\frac{k}{2}}\,\bar z^{\frac{k}{2}}.$$

(b) para n ímpar, temos m casos

$$\left.1^0\right)\ \dot z = iz + A_{k,0} z^k + A_{1,k-1} z\bar z^{k-1},$$

$$\left.2^0\right)\ \dot z = iz + A_{k-1,1} z^{k-1}\bar z + A_{2,k-2} z^2\bar z^{k-2},$$

$$\left.3^0\right)\ \dot z = iz + A_{k-2,2} z^{k-2}\bar z^2 + A_{3,k-3} z^3\bar z^{k-3},$$

$$\vdots$$

$$\left.(m-1)^0\right)\ \dot z = iz + A_{\frac{(k+1)}{2}+2,\frac{(k-1)}{2}-2}\, z^{\frac{(k+1)}{2}+2}\,\bar z^{\frac{(k-1)}{2}-2} + A_{\frac{(k-1)}{2}-1,\frac{(k+1)}{2}+1}\, z^{\frac{(k-1)}{2}-1}\,\bar z^{\frac{(k+1)}{2}+1},$$

$$\left.m^0\right)\ \dot z = iz + A_{\frac{(k+1)}{2}+1,\frac{(k-1)}{2}-1}\, z^{\frac{(k+1)}{2}+1}\,\bar z^{\frac{(k-1)}{2}-1} + A_{\frac{(k-1)}{2},\frac{(k+1)}{2}}\, z^{\frac{(k-1)}{2}}\,\bar z^{\frac{(k+1)}{2}}.$$

onde

$$m = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & se \quad n \quad é \quad par \\ \dfrac{n-1}{2}, & se \quad n \quad é \quad ímpar \end{cases}$$

é o número de casos.

Em $[1]$, encontra-se com mais detalhes, a formação dos coeficientes A_{kl}, onde foi feito passo a passo, o fato é que este teorema, generaliza os dois anteriores, nos fornecendo vários exemplos de equações diferenciais que possuem a propriedade de ter um centro fracamente na origem.

Conclusão

Acreditamos que o problema de procurar, seja por centros persistentes ou fracamente persistentes em outras famílias de equações diferenciais não ajudará a entender melhor a estrutura de todos os centros, por isto, os Teoremas listados acima, não tem o propósito de catalogar todos os centros fracamente persistentes que existem, mas sim, exemplificar esta categoria de centros.

Referências bibliográficas

[1] ROCHA, VALDOMIRO, **Centros Persistentes**. 2010. 69 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra), Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2010.