Autor(es): LEANDRO DA LUZ VIEIRA, HAMILTON PRADO BUENO

Existência e multiplicidade de soluções de problemas elípticos pelo método da variedade de Nehari

Introdução

Pelo Princípio de Dirichilet, a solução de uma equação diferencial juntamente com uma condição de fronteira pode ser obtida como minimizador de um funcional apropriado. A ideia principal embutida no Princípio de Dirichilet é a interpretação de um problema diferencial, escrito abstratamente como $F(u)=0$, como $\Phi'(u)=0$, sendo Φ um funcional adequado definido em um conjunto de funções, e Φ' a diferencial de Φ. Em outras palavras, zeros de F são vistos como pontos críticos (não necessariamente mínimos) de Φ. A equação $\Phi'(u)=0$ é equação de Euler ou equação de Euler-Lagrange associada à Φ.

Muitas vezes, verifica-se que é muito mais fácil encontrar um ponto crítico de Φ do que trabalhar diretamente na equação $F(u)=0$. Além disso, em inúmeras aplicações, o funcional Φ tem um significado físico por ser, em alguns casos, a integral de um Lagrangeano, sendo esta integral conhecida por muitos autores como *Funcional Ação*. Portanto, encontrar um ponto de mínimo de Φ significa não só resolver a equação diferencial, mas encontrar a solução de ação mínima, frequentemente de particular relevância em problemas concretos. A interpretação de Φ como uma energia é tão frequente que os funcionais associados a problemas diferenciais são normalmente chamado funcionais de energia, mesmo quando o problema não tem aplicações físicas diretas.

Acontece, muitas vezes, que o funcional Φ associado ao problema de valor de fronteira é ilimitado inferiormente. Portanto, nenhuma minimização é possível no espaço inteiro, sendo necessária, então, a restrição de Φ a um conjunto onde ele seja, de fato, limitado inferiormente, o que possibilita, em alguns casos, sob algumas hipóteses, resolver o problema, uma vez que um ponto crítico de Φ nesse conjunto será um ponto crítico de Φ no espaço inteiro. A variedade de Nehari é um exemplo de conjunto onde esta minimização pode ser realizada.

Este trabalho foi realizado tendo A. Szulkin e T. Weth (2004) como principal referência e teve como objetivo utilizar o Método da Variedade de Nehari para provar a existência e multiplicidade de soluções para o problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

em que Ω é um aberto limitado do IR^n, $\lambda < \lambda_1$, sendo λ_1 o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω e $f \in C(\Omega \times IR, IR)$ é uma função satisfazendo a restrição de crescimento

$$|f(x,u)| \le a(1+|u|^{p-1}) \tag{2}$$

para algum $a>0$ e $2<q<2^*$, sendo que 2^* representa aqui a imersão de Sobolev de $H^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, e tem valor

$$2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2}, & se\ N \ge 3 \\ \infty, & se\ N=1\ ou\ N=2. \end{cases} \tag{3}$$

Material e métodos

Pesquisa bibliográfica em artigos, livros, dissertações e teses.

Resultados e discussão

Procuramos soluções de (1) definidas no espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$.

Apoio financeiro: CAPES

10º FEPEG FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO
RESPONSABILIDADE SOCIAL: INDISSOCIABILIDADE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA
Realização: Unimontes, Minas Gerais. Apoio: FAPEMIG, FADENOR
ISSN 1806-549 X

Definição 1: (Solução fraca) Uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo a igualdade

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \lambda \int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega fv\, dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

é chamada solução fraca do problema (1), com

$$\nabla u \cdot \nabla v = \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)$$

denotando o produto interno usual do espaço IR^n.

A norma usual do espaço $H_0^1(\Omega)$ é equivalente à norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

que é gerada pelo produto interno

$$< u, v >= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx.$$

Aqui, o espaço $H_0^1(\Omega)$ está sendo considerado com essa norma.

Consideremos o funcional "energia" $\Phi : H_0^1(\Omega) \to IR$ dado por

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \lambda u^2 dx - \int_\Omega F(x,u)\ dx \equiv \frac{1}{2}\|u\|^2 - I_1(u) - I(u)$$

em que

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\, ds\,.$$

Lema 1: Φ está bem definido.

Lema 2: **(**Diferenciabilidade de Φ) O funcional Φ é de classe $C^1(\Omega, IR)$ e

$$\Phi'(u)v := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ dx - \lambda \int_\Omega uv\, dx - \int_\Omega f(x,u)\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 1: Suponhamos que f seja contínua e satisfaça (2). Então:

a) $\Phi \in C^1(\Omega, IR)$ e $\Phi'(u) = 0$ se e somente se $u \in H_0^1(\Omega)$ for uma solução fraca de (1).

b) Os funcionais I e I_1 são (sequencialmente) fracamente contínuos, isto é, se u_n converge fracamente para u, então $I(u_n)$ converge fortemente para $I(u)$.

c) Os operadores I' e I_1' são completamente contínuos, isto é, se u_n converge fracamente para u, então $I'(u_n)$ converge fortemente para $I'(u)$ e $I_1'(u_n)$ converge fortemente para $I_1'(u)$.

d) Se $f(x,u) = o(u)$ quando $u \to 0$, então $I_1'(u) = o\|u\|$ e $I_1(u) = o(\|u\|^2)$ quando $u \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$.

e) Se N = 1, então f não precisa satisfazer a restrição de crescimento (2).

Definição 2: Sejam E um espaço de Banach real e $\Phi \in C^1(E, IR)$ um funcional. O conjunto

$$N := \{u \in E \setminus \{0\}) : \Phi'(u)u = 0\}$$

é chamado V*ariedade de Nehari*.

Assuma, sem perda de generalidade que $\Phi(0) = 0$. Assuma também que, para cada $w \in S = \{w \in E : \|w\| = 1\}$, a função $\alpha_w := \Phi(sw)$ atinja um único máximo $s_w \in (0, \infty)$ tal que $\alpha_w'(s) > 0$ sempre que $0 < s < s_w$ e $\alpha_w'(s) < 0$ sempre que $s > s_w$ e $s_w \ge \delta$ para algum $\delta > 0$, independente de $w \in S$ (veja fig.1). Esta suposição garante que, para cada direção $w \in S$ fixada, o método da Variedade de Nehari obtém pontos críticos simplesmente ao analisar a função real $\alpha_w : [0, \infty) \to IR$. Se definirmos $c = \inf_{u \in N} \Phi(u)$, sob condições apropriadas de Φ, espera-se que c seja atingido em algum $u_0 \in N$ e que u_0 seja um ponto crítico de Φ em E (expressamos este notável fato dizendo que N é

ISSN 1806-549 X

uma restrição natural para Φ) e, portanto, uma solução da equação (1). Prova-se que $u_0 \in N$ é um ponto crítico sempre que $\Phi(u_0) = c$.

Definição 3: Seja E um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(E, IR)$. Dizemos que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale em E se toda sequência de Palais-Smale (u_n) para Φ, com $u_n \in E$ para todo n, contém uma subsequência convergente.

Seguindo M. Willem (1996) definimos o que chamamos de Estado Fundamental ou ponto crítico de menor energia:

Definição 4: **(**Estado Fundamental ou ponto crítico de menor energia) Seja $\Phi \in C^1(\Omega, IR)$ um funcional. Um ponto crítico $u \neq 0$ de Φ tal que $\Phi(u) = c$, sendo $c = \inf_{u \in N} \Phi(u)$, é chamado *estado fundamental ou ponto crítico de menor energia.*

Teorema 1: Se E é um espaço de Banach de dimensão infinita, $\Phi \in C^1(S, IR)$ é limitado inferiormente e satisfaz a condição de Palais-Smale, então Φ tem infinitos pares de pontos críticos.

Teorema 2: Seja E um espaço de Hilbert e suponha que $\Phi(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - I(u),$ sendo

i) $I_1'(u) = o\|u\|$ quando $u \to 0$;

ii) $s \mapsto \frac{I'(su)u}{s}$ é estritamente crescente para todo $u \neq 0$ e $s > 0$;

iii) $\frac{I'(su)}{u^2} \to \infty$ uniformente para u em subconjuntos fracamente compactos de $E \setminus \{0\}$ quando $s \to \infty$;

iv) I' é completamente contínuo.

Então a equação $\Phi'(u) = 0$ tem uma solução de estado fundamental. Além disso, se I é par, então esta equação tem infinitos pares de soluções.

Conclusão

Após a realização deste trabalho conclui-se que o método da Variedade é uma ferramenta bastante útil para provar a existência de soluções de problemas elípticos que satisfazem certas propriedades, como acima. Pela pesquisa bibliográfica realizada, foi possível ver que este método tem sido bastante utilizado nas pesquisas recentes de Equações diferenciais Parciais.

Agradecimentos

Ao professor Hamilton Prado Bueno que, com muita dedicação e responsabilidade, me orientou na realização deste trabalho.

Ao departamento de pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

À CAPES.

Referencias bibiográficas

A. Szulkin and T. Weth**. The method of Nehari manifold**. In: Handbook of Nonconvex Analysis and Applications, D.Y. Gao and D. Motreanu eds., International Press, Boston, 2010, pp. 597-632.

M. Willem. **Minimax Theorems**. Birkhuser, Boston, 1996.

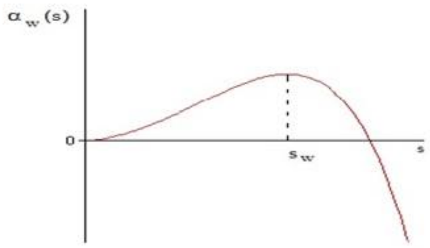

Figura 1: O gráfico de $\alpha_w := \Phi(sw)$ é exibido para $s > 0$ e $w \in S$ fixado, ressaltando o único máximo $s_w \in (0, \infty)$ tal que $\alpha_w'(s) > 0$ sempre que $0 < s < s_w$ e $\alpha_w'(s) < 0$ sempre que $s > s_w$.