



Autor(es): JULIANA GUIMARÃES CANÇADO, VALDOMIRO ROCHA, WARLEY FERREIRA DA CUNHA,  
WARLEY MENDES BATISTA, SEBASTIÃO ALVES DE SOUZA

## Comportamento das Linhas Assintóticas Próximas a Uma Curva de Pontos de Inflexão Sobre Superfícies em $\mathbb{R}^4$

### Introdução

Consideremos a imersão de uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  e façamos sua composição com a aplicação (inversa da) projeção estereográfica de  $\mathbb{R}^3$  em  $S^3$  e depois a inclusão em  $\mathbb{R}^4$ . Em (LITTLE, J. A.), Little mostrou que, com esta construção, as linhas de curvatura principal da imersão em  $\mathbb{R}^3$  são levadas nas linhas assintóticas da imersão em  $\mathbb{R}^4$ , bem como os pontos umbílicos da imersão em  $\mathbb{R}^3$  são levados nos pontos de inflexão da imersão em  $\mathbb{R}^4$ . No artigo (GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J.) Garcia e Sotomayor apresentam a carta

$$\alpha(u, v) = c(u) + v(N \wedge T)(u) + \left[ \frac{1}{2}k(u)v^2 + \frac{1}{6}a(u)v^3 + \frac{1}{24}b(u)v^4 + \dots \right]N(u), \quad (1)$$

onde  $c: [0, l] \rightarrow S$  é uma parametrização regular pelo comprimento de arco de uma curva de pontos umbílicos, tal que  $\{T, N \wedge T, N\}$  é uma base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^3$ ,  $k$  é a curvatura normal de  $S$  nas direções  $T$  e  $N \wedge T$ . Neste artigo, eles provaram que esta parametrização define uma carta local  $C^\infty$  em uma pequena vizinhança tubular de  $c$ . Também determinam os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais na carta  $\alpha$ . Além disso, estudam as configurações principais próximas à curva de pontos umbílicos.

Denotando por  $\bar{\alpha} = \phi \circ \alpha$  a projeção estereográfica de  $M^2$  em  $S^3$  e por  $\bar{\alpha} = i \circ \bar{\alpha}$  a imersão de  $M^2$  em  $\mathbb{R}^4$ , de acordo com o visto acima, a linha de pontos umbílicos de  $\alpha$  é aplicada, via (inversa da) projeção estereográfica, em uma linha de pontos de inflexão de  $\bar{\alpha}$  e as linhas de curvatura principal de  $\alpha$ , nas linhas assintóticas de  $\bar{\alpha}$ . O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento dessas linhas assintóticas nas proximidades dessa curva de pontos de inflexão.

### Material e métodos

Pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa.

### Resultados e discussão

Seja  $\alpha: M^2 \rightarrow S^3$  uma imersão de uma superfície regular orientada em  $S^3$ . Consideremos a inclusão natural  $i: S^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  e a composição  $\alpha = i \circ \alpha$  ainda denotada por  $\alpha$ . Assumamos que  $(u, v)$  seja uma carta positiva de  $M$  e que  $\{\alpha_u, \alpha_v, N_1, N_2\}$  seja um referencial positivo de  $\mathbb{R}^4$ , sendo  $\{N_1, N_2\}$  um referencial ortonormal de campos de vetores para  $\alpha$ , onde  $N_1(p) \in T_p S^3$  e  $N_2(p)$  é a normal interior a  $S^3$ , para todo  $p \in M$ . Assim,  $N_2 \equiv -\alpha$ .

Em tal carta  $(u, v)$  temos que  $e_2 = E, f_2 = F$  e  $g_2 = G$ , onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\alpha$ . Segue que  $II_2 = I$ . Então,

$$\eta = \frac{II}{I} = \frac{II_1}{I} N_1 + \frac{II_2}{I} N_2 = \frac{II_1}{I} N_1 + N_2.$$

Isto implica que a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta sobre  $N_2 = 1$ , para todo  $p \in M$ . Estes pontos são denominados semiumbílicos. Estes resultados foram obtidos em (ROMERO-FUSTER, M.C.; SANCHEZ-BRINGAS, F.).

Como exemplo, consideremos a aplicação (inversa da) projeção estereográfica  $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow S^3$ , dada por

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{1+w}(x, y, z, w),$$

onde



$$w = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Seja  $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão de uma superfície regular e orientada  $M^2$  em  $\mathbb{R}^3$ . Denotemos por  $\bar{\alpha} = \phi \circ \alpha$  a projeção estereográfica de  $M^2$  em  $S^3$  e por  $\bar{\alpha} = \phi \circ \alpha$  a imersão de  $M^2$  em  $\mathbb{R}^4$ . Portanto,  $\bar{\alpha}$  apresenta a seguinte escrita

$$\bar{\alpha}(u, v) = \frac{1}{1 + \langle \alpha(u, v), \alpha(u, v) \rangle} (2\alpha(u, v), \langle \alpha(u, v), \alpha(u, v) \rangle - 1).$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\bar{\alpha}$  são dados em função dos coeficientes da primeira forma fundamental de  $\alpha$  por  $\bar{E}(u, v) = (1+w)^{-2}E(u, v)$ ,  $\bar{F}(u, v) = (1+w)^{-2}F(u, v)$  e  $\bar{G}(u, v) = (1+w)^{-2}G(u, v)$ .

Calculando os coeficientes da segunda forma fundamental, obtemos  $\bar{e}_1(u, v) = (1+w)^{-2}[(1+w)e(u, v) + E(u, v)t(u, v)]$ ,  $\bar{f}_1(u, v) = (1+w)^{-2}[(1+w)f(u, v) + F(u, v)t(u, v)]$ ,  $\bar{g}_1(u, v) = (1+w)^{-2}[(1+w)g(u, v) + G(u, v)t(u, v)]$ ,  $\bar{e}_2(u, v) = (1+w)^{-2}E(u, v) = \bar{E}(u, v)$ ,  $\bar{f}_2(u, v) = (1+w)^{-2}F(u, v) = \bar{F}(u, v)$  e  $\bar{g}_2(u, v) = (1+w)^{-2}G(u, v) = \bar{G}(u, v)$ .

Podemos agora calcular o vetor curvatura média  $\bar{H}$ , o qual tem suas componentes dadas por  $\bar{H}_1(u, v) = (1+w)H(u, v) + t(u, v)$  e  $\bar{H}_2(u, v) = 1, \forall (u, v)$ . Como  $\bar{H} = \bar{H}_1N_1 + \bar{H}_2N_2$ , vem que  $\bar{H} = \bar{H}_1N_1 + N_2$  e a elipse de curvatura  $\varepsilon_{\bar{\alpha}}(p)$  está degenerada por um segmento de reta sobre a reta suporte  $N_2 = 1$ , para todo  $p \in M$ . E ainda, como  $\bar{H}(p) \neq 0, \forall p \in M$ , as possíveis  $\bar{H}$ -singularidades só poderão ocorrer em pontos de inflexão, onde a elipse de curvatura se torna um segmento de reta radial (um ponto, neste caso).

Para simplificar os cálculos, tomamos uma carta  $(u, v)$  na qual a primeira forma fundamental de  $\alpha$  está diagonalizada, com  $E = G = 1$  e  $F = 0$ . Nesta carta, os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de  $\bar{\alpha}$  são  $\bar{E}(u, v) = \bar{G}(u, v) = \bar{e}_2(u, v) = \bar{g}_2(u, v) = (1+w)^{-2}$ ,  $\bar{F}(u, v) = \bar{f}_2(u, v) = 0$ ,  $\bar{e}_1(u, v) = (1+w)^{-2}[(1+w)e(u, v) + t(u, v)]$ ,  $\bar{f}_1(u, v) = (1+w)^{-1}f(u, v)$  e  $\bar{g}_1(u, v) = (1+w)^{-2}[(1+w)g(u, v) + t(u, v)]$ , onde os símbolos sem barra se referem à imersão  $\alpha$ . Calculando o vetor curvatura normal de  $\bar{\alpha}$ , temos

$$K_N = \frac{E(f_1g_2 - f_2g_1) - f(e_1g_2 - e_2g_1) + G(e_1f_2 - e_2f_1)}{2(EG - F^2)} = 0, \forall p \in M,$$

como era esperado, uma vez que ela está associada à área da elipse de curvatura, que neste caso é nula em todos os pontos. A resultante  $\Delta$  é dada por

$$\Delta(u, v) = -(1+w)^{-6} \left[ (f(u, v))^2 + \left( \frac{e(u, v) - g(u, v)}{2} \right)^2 \right].$$

Deste modo, a resultante  $\Delta$  anula-se nos pontos  $(u, v)$  onde  $f(u, v) = 0$  e  $e(u, v) - g(u, v) = 0$ , isto é, nos pontos umbílicos de  $\alpha$ . Provamos, assim, o seguinte teorema.

**Teorema 1.** Com as construções acima, um ponto  $(u, v)$  é uma  $\bar{H}$ -singularidade de  $\bar{\alpha}$  se, e somente se, for um ponto umbílico de  $\alpha$ .

No artigo (GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J.), Garcia e Sotomayor provaram a seguinte proposição: Seja  $c : [0, l] \rightarrow M$  uma parametrização pelo comprimento de arco de uma curva regular de pontos umbílicos, tal que  $\{T, N \wedge T, N\}$  é um referencial positivo de  $\mathbb{R}^3$ . Então a expressão

$$\alpha(u, v) = c(u) + v(N \wedge T)(u) + \left[ \frac{1}{2}k(u)v^2 + \frac{1}{6}a(u)v^3 + \frac{1}{24}b(u)v^4 + \dots \right]N(u),$$

onde  $k(u) = k_n(c(u), T) = k_n(c(u), N \wedge T)$  é a curvatura normal de  $M$  nas direções  $T$  e  $N \wedge T$ ,  $k_g$  é a curvatura geodésica e  $\tau_g$  é a torção geodésica da curva  $c$ , define uma carta local  $C^\infty$  em uma pequena vizinhança tubular de  $c$ . Além disso,  $\tau_g(u) = 0$ . Tendo determinado os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais na carta  $\alpha$ , as curvaturas média e Gaussiana e a equação diferencial das linhas de curvatura, provaram a seguinte proposição: Suponha que  $\nabla H(u, 0) = (k', a(u)/2)$  não seja zero e um um ponto  $u_0$ . Então as folheações principais próximas ao ponto  $c(u_0)$



da curva são como a seguir:

- i) Se  $k'(u_0) \neq 0$ , então ambas as folheações principais são transversais à curva de pontos umbílicos. Veja Figura 1 esquerda.
- ii) Se  $k'(u_0) = 0$ ,  $k''(u_0) \neq 0$  e  $a(u_0) \neq 0$ , então uma folheação principal tem contato quadrático com a curva  $c$  no ponto  $c(u_0)$ . Veja Figura 1, centro e direita.

Em (MELLO, L.F.), Mello mostrou que as linhas de curvatura principal de  $\alpha$  são aplicadas, via (inversa da) projeção estereográfica, nas linhas assintóticas de  $\bar{\alpha}$ , as quais neste caso são ortogonais e que os pontos umbílicos (singularidades das linhas de curvatura principais de  $\alpha$ ) são levados nos pontos de inflexão (singularidades das linhas assintóticas de  $\bar{\alpha}$ ).

Em (ROMERO-FUSTER, M.C.; SANCHEZ-BRINGAS, F.), Romero-Fuster e Sanchez-Bringas salientaram que a projeção estereográfica proporciona uma ponte entre o estudo das propriedades das linhas assintóticas e os pontos de inflexão de superfícies em  $\mathbb{R}^4$  e as linhas de curvatura principal e pontos umbílicos das superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , pois quaisquer resultados dos primeiros representam uma generalização de problemas similares aos últimos.

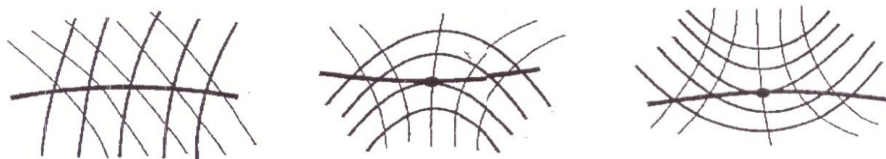
Assim, o comportamento das linhas de curvatura principal próximas à curva de pontos umbílicos da carta  $\alpha$  apresentada por Garcia e Sotomayor em (GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J.) é análogo ao comportamento das linhas assintóticas próximas à curva de pontos de inflexão de  $\bar{\alpha}$ , obtida pela aplicação da (inversa da) projeção estereográfica de  $\alpha$  em  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ . Veja Figura 1.

## Considerações finais

O exemplo trata de imersões de superfícies em  $\mathbb{R}^4$  com  $K_N \equiv 0$ , ou seja, com a elipse de curvatura degenerada em um segmento de reta. Neste exemplo, foi feita uma redução da codimensão da imersão, visto que a imagem da superfície pela imersão está contida em uma hipersfera. Uma pergunta natural a ser feita é a seguinte:  $K_N \equiv 0$  é suficiente para a garantia da redução da codimensão da imersão? A resposta é não. Uma direção de pesquisa para estudo futuro refere-se à obtenção de um exemplo de uma imersão não hipersférica  $\alpha$  de uma superfície regular e orientada em  $\mathbb{R}^4$ , com linhas assintóticas ortogonais globalmente definidas, tendo um ponto de inflexão isolado. Todos os exemplos que aparecem na literatura são de imersões hipersféricas.

## Referências bibliográficas

- GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J. *On the Patterns of Principal Curvature Lines around a curve of Umbilic Points*, Annals of the Brazilian Academy of Sciences, 77(1) (2005), 13-24.
- LITTLE, J. A. *On singularities of submanifolds of a higher dimensional Euclidean space*, Ann. Mat. Pura Appl. 83 (1969), 261-335.
- MELLO, L.F. *Linhas de curvatura direcional média em superfícies imersas em  $\mathbb{R}^4$* . Tese de Doutorado, USP (2001).
- ROMERO-FUSTER, M.C.; SANCHEZ-BRINGAS, F. *Umbilicity of surfaces with orthogonal asymptotic lines in  $\mathbb{R}^4$* , Differential Geometry and its Applications, 16 (2002), 213-224.



**Figura 1.** Linhas de curvatura principal próximas a uma curva de pontos umbílicos: caso transversal, esquerda, e caso tangencial, centro e direita.