10º FEPEG FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO
RESPONSABILIDADE SOCIAL: INDISSOCIABILIDADE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA
Realização: Unimontes, Minas Gerais. Apoio: FAPEMIG, FADENOR
ISSN 1806-549 X

Autor(es): JULIANA GUIMARÃES CANÇADO, VALDOMIRO ROCHA, WARLEY FERREIRA DA CUNHA, WARLEY MENDES BATISTA, SEBASTIÃO ALVES DE SOUZA

Centros sobre uma variedade central local no Sistema de Lü

Introdução

Considere o sistema de equações diferenciais não-lineares em IR^3, conhecido como sistema de Lü,

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = cy - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}, \qquad (1)$$

em que $(x,y,z)\in IR^3$ são as variáveis de estado e $(a,b,c)\in IR^3$ são parâmetros reais. Neste trabalho foram discutidos resultados sobre a existência de centros para o fluxo do sistema (1) restrito a uma variedade central local de certos equilíbrios isolados. Nossos estudos foram baseados em $[1]$ e $[2]$.

Material e métodos

Pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa.

Resultados e discussão

Considere o sistema (1) e denote o campo vetorial associado a este sistema por $\chi = (a(y-x),\ cy - xz,\ -bz + xy)$. Esse sistema possui um par de equilíbrios simétricos $Q_{\pm} = (\pm\sqrt{bc}, \pm\sqrt{bc}, c)$, quando $bc > 0$ e $Q_0 = (0, 0, 0)$ para quaisquer valores de parâmetros. O sistema (1) é invariante pela mudança de coordenadas $(x,y,z)\to(-x,-y,z)$. Assim podemos restringir nossa análise da estabilidade no equilíbrio Q_+.

Da análise linear do sistema (1) em Q_+ temos o seguinte Teorema.

Teorema 1. Considere o sistema (1). Seja a reta $\ell = \left\{(a,b,c)\in IR^3 : a \neq 0,\ b = 2a,\ c = c_c = \dfrac{(a+b)}{3}\right\}$. Se $(a,b,c)\in\ell$, e $c_c > 0$ (respectivamente $c_c < 0$) então a matriz Jacobiana de χ em Q_+ possui um autovalor real negativo (respectivamente positivo) e um par de autovalores imaginários puros. Além disso, $l_1(a,b,c)|_\ell = l_2(a,b,c)|_\ell = l_3(a,b,c)|_\ell = 0$, onde l_1, l_2 e l_3 denotam os 1^0, 2^0 e 3^0 coeficientes de Lyapunov em Q_+.

Em $[2]$ aparece a seguinte conjectura.

Conjectura. Considere o sistema (1). Para valores de parâmetros em ℓ os equilíbrios correspondentes $Q_{\pm}$ são centros não-lineares para o fluxo do sistema (1) restrito a uma variedade central local.

Esta questão está relacionada com o Problema Foco-Centro do sistema de Lü para os valores de parâmetros em ℓ. Resultados foram estudados em $[1]$, os quais deram respostas afirmativas à Conjectura acima.

10º FEPEG FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO
RESPONSABILIDADE SOCIAL: INDISSOCIABILIDADE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA
Realização: Unimontes, Minas Gerais. Apoio: FAPEMIG, FADENOR
ISSN 1806-549 X

Teorema 2. Para parâmetros em ℓ, o sistema de Lü (1) possui uma família de superfícies algébricas invariantes $F_a^{-1}(0)$, onde $F_a(x,y,z)=4x^2-4xz+z^2-24az$. Além disso, a variedade central local $W^C\subset F_a^{-1}(0)$ e o fluxo do sistema restrito a $F_a^{-1}(0)$ possui um centro em $Q_\pm$.

Demonstração. O sistema (1) é invariante pela involução $(x,y,z)\to(-x,-y,z)$, logo vamos restringir nossa análise no equilíbrio Q_+. Para valores dos parâmetros em ℓ, o sistema (1) possui o ponto de equilíbrio Q_+ não hiperbólico. Pelo Teorema da Variedade Central, existe uma variedade invariante bidimensional W^C numa vizinhança de Q_+ que é tangente ao auto espaço central em Q_+ e contém todo o comportamento recorrente local do sistema. Ao transladarmos o equilíbrio Q_+ para a origem, fazendo uma mudança linear de coordenadas e um reescalonamento no tempo, o sistema (1) pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases}\dot{x}=P_1(x,y,z)=24\sqrt{2}ay+4x^2+4\sqrt{2}xy-2\sqrt{2}yz-z^2,\\ \dot{y}=P_2(x,y,z)=-24\sqrt{2}ax-16\sqrt{2}x^2-8xy-6\sqrt{2}xz+4yz+7\sqrt{2}z^2,\\ \dot{z}=P_3(x,y,z)=-48az+8x^2+8\sqrt{2}xy-4\sqrt{2}yz-2z^2.\end{cases}\qquad(2)$$

Para o sistema (2) existe exatamente uma superfície algébrica invariante

$$F_a(x,y,z)=4x^2-4xz+z^2-24az=0.\quad(3)$$

Pois, é fácil ver que $\psi F_a=\kappa F_a$, onde $\psi(x,y,z)=(P_1(x,y,z),P_2(x,y,z),P_3(x,y,z))$ é o campo vetorial associado ao sistema (2) e $\kappa(x,y,z)=-48a$, é o cofator da superfície algébrica invariante $F_a=0$. E ainda, $F_a(0,0,0)=0$ e $\nabla F_a(0,0,0)=(0,0,-24a)$, com $a\neq 0$. Assim, a superfície invariante dada por (3) contém o equilíbrio e é tangente ao auto espaço central, plano xy, na origem. Portanto, numa vizinhança da origem, existe a variedade central local $W^C\subset F_a^{-1}(0)$. Note que a superfície algébrica invariante é quadrática em z. Logo, resolvendo (3) em função de z, encontraremos duas soluções, porém apenas uma delas satisfaz o equilíbrio Q_+ que agora está na origem. Assim, substituindo esta solução nas duas primeiras equações de (2), obtemos o seguinte sistema em coordenadas locais

$$\begin{cases}\dot{x}=-288a^2-96ax+96a\sqrt{3a(3a+x)}+16x\sqrt{3a(3a+x)}+8y\sqrt{6a(3a+x)},\\ \dot{y}=2016\sqrt{2}a^2+576\sqrt{2}ax+48ay-672a\sqrt{6a(3a+x)}-88x\sqrt{6a(3a+x)}-16y\sqrt{3a(3a+x)},\end{cases}$$

o qual não é invariante pela involução $(x,y,t)\to(-x,-y,-t)$. Façamos a mudança de coordenadas

$$\begin{cases}u^2=12ax+36a^2,\\ y=y,\end{cases}$$

a qual é válida numa vizinhança da origem e muda o equilíbrio de interesse para $(u,y)=(6|a|,0)$, com $a\neq 0$. Transladando novamente o equilíbrio para a origem e fazendo o reescalonamento no tempo $t\to 3at$, obtemos o sistema

$$\begin{cases}\dot{u}=72\sqrt{2}a^2y+12au^2,\\ \dot{y}=-72\sqrt{2}a^2u-54\sqrt{2}au^2-24auy-11\sqrt{2}u^3.\end{cases}$$

10º FEPEG FÓRUM ENSINO · PESQUISA EXTENSÃO · GESTÃO
RESPONSABILIDADE SOCIAL: INDISSOCIABILIDADE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA
ISSN 1806-549 X

Mas, este sistema é Hamiltoniano com função Hamiltoniana

$$H(u,y)=-\sqrt{2}\left(36a^2u^2+18au^3+\frac{11}{4}u^4\right)-12au^2y-36\sqrt{2}a^2y^2.$$

E isto finda a prova do teorema, e confirma que a Conjectura é verdadeira. Portanto, o equilíbrio na origem, o qual poderia ser um foco ou um centro, é de fato um centro.

Considerações finais

(i) Note que a variedade central local é uma superfície algébrica regrada, a qual pode ser escrita explicitamente. Além disso, ela contém ambos os equilíbrios $Q_{\pm}$ e é única no espaço de estado. Veja Figura 1.

(ii) Como consequência do Teorema do Centro de Lyapunov, o sistema de Lü, admite uma integral primeira analítica numa vizinhança de $Q_{\pm}$, embora ela e o seu domínio de definição ainda não são conhecidos explicitamente.

Conclusão

Neste trabalho, mostramos a existência de centros sobre uma variedade central dos equilíbrios $Q_{\pm}$ do sistema de Lü (1). Esse sistema restrito a uma variedade central W^C é um sistema Hamiltoniano, donde concluímos que o equilíbrio na origem, o qual poderia ser um foco ou um centro, é de fato um centro.

Referências bibliográficas

[1] MAHDI, A.; PESSOA, C. and SHAFER, D.S. **Centers on Center Manifolds in the Lü.** System. Physics Letters A 375 ¨ (2011), 3509-35.

[2] MELLO, L.F. ; COELHO, S.F. **Degenerate Hopf bifurcations in the Lü System**. Physics Letters A 373 (2009), 1116-1120.

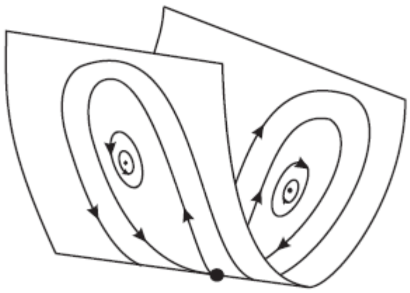

Figura 1. Retrato de fase sobre a superfície regrada invariante, a qual contém a variedade central em Q_{+} e Q_{-}. Figura proveniente da referência $[1]$.