



Autor(es): JULIANA GUIMARÃES CANÇADO, VALDOMIRO ROCHA, WARLEY FERREIRA DA CUNHA,
WARLEY MENDES BATISTA, SEBASTIÃO ALVES DE SOUZA

Comportamento das Linhas Assintóticas Próximas a Uma Curva de Pontos de Inflexão Sobre Superfícies em \mathbb{R}^4

Introdução

Consideremos a imersão de uma superfície em \mathbb{R}^3 e façamos sua composição com a aplicação (inversa da) projeção estereográfica de \mathbb{R}^3 em S^3 e depois a inclusão em \mathbb{R}^4 . Em (LITTLE, J. A.), Little mostrou que, com esta construção, as linhas de curvatura principal da imersão em \mathbb{R}^3 são levadas nas linhas assintóticas da imersão em \mathbb{R}^4 , bem como os pontos umbílicos da imersão em \mathbb{R}^3 são levados nos pontos de inflexão da imersão em \mathbb{R}^4 . No artigo (GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J.) Garcia e Sotomayor apresentam a carta

$$\alpha(u, v) = c(u) + v(N \wedge T)(u) + \left[\frac{1}{2}k(u)v^2 + \frac{1}{6}a(u)v^3 + \frac{1}{24}b(u)v^4 + \dots \right] N(u), \quad (1)$$

onde $c: [0, l] \rightarrow S$ é uma parametrização regular pelo comprimento de arco de uma curva de pontos umbílicos, tal que $\{T, N \wedge T, N\}$ é uma base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 , k é a curvatura normal de S nas direções T e $N \wedge T$. Neste artigo, eles provaram que esta parametrização define uma carta local C^∞ em uma pequena vizinhança tubular de c . Também determinam os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais na carta α . Além disso, estudam as configurações principais próximas à curva de pontos umbílicos.

Denotando por $\bar{\alpha} = \phi \circ \alpha$ a projeção estereográfica de M^2 em S^3 e por $\bar{\alpha} = i \circ \bar{\alpha}$ a imersão de M^2 em \mathbb{R}^4 , de acordo com o visto acima, a linha de pontos umbílicos de α é aplicada, via (inversa da) projeção estereográfica, em uma linha de pontos de inflexão de $\bar{\alpha}$ e as linhas de curvatura principal de α , nas linhas assintóticas de $\bar{\alpha}$. O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento dessas linhas assintóticas nas proximidades dessa curva de pontos de inflexão.

Material e métodos

Pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa.

Resultados e discussão

Seja $\alpha: M^2 \rightarrow S^3$ uma imersão de uma superfície regular orientada em S^3 . Consideremos a inclusão natural $i: S^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ e a composição $\alpha = i \circ \alpha$ ainda denotada por α . Assumamos que (u, v) seja uma carta positiva de M e que $\{\alpha_u, \alpha_v, N_1, N_2\}$ seja um referencial positivo de \mathbb{R}^4 , sendo $\{N_1, N_2\}$ um referencial ortonormal de campos de vetores para α , onde $N_1(p) \in T_p S^3$ e $N_2(p)$ é a normal interior a S^3 , para todo $p \in M$. Assim, $N_2 \equiv -\alpha$.

Em tal carta (u, v) temos que $e_2 = E, f_2 = F$ e $g_2 = G$, onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental de α . Segue que $II_2 = I$. Então,

$$\eta = \frac{II}{I} = \frac{II_1}{I} N_1 + \frac{II_2}{I} N_2 = \frac{II_1}{I} N_1 + N_2.$$

Isto implica que a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta sobre $N_2 = 1$, para todo $p \in M$. Estes pontos são denominados semiumbílicos. Estes resultados foram obtidos em (ROMERO-FUSTER, M.C.; SANCHEZ-BRINGAS, F.).

Como exemplo, consideremos a aplicação (inversa da) projeção estereográfica $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow S^3$, dada por

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{1+w}(x, y, z, w),$$

onde



$$w = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Seja $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de uma superfície regular e orientada M^2 em \mathbb{R}^3 . Denotemos por $\bar{\alpha} = \phi \circ \alpha$ a projeção estereográfica de M^2 em S^3 e por $\bar{\alpha} = \phi \circ \alpha$ a imersão de M^2 em \mathbb{R}^4 . Portanto, $\bar{\alpha}$ apresenta a seguinte escrita

$$\bar{\alpha}(u, v) = \frac{1}{1 + \langle \alpha(u, v), \alpha(u, v) \rangle} (2\alpha(u, v), \langle \alpha(u, v), \alpha(u, v) \rangle - 1).$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental de $\bar{\alpha}$ são dados em função dos coeficientes da primeira forma fundamental de α por $\bar{E}(u, v) = (1+w)^{-2}E(u, v)$, $\bar{F}(u, v) = (1+w)^{-2}F(u, v)$ e $\bar{G}(u, v) = (1+w)^{-2}G(u, v)$.

Calculando os coeficientes da segunda forma fundamental, obtemos $\bar{e}_1(u, v) = (1+w)^{-2}[(1+w)e(u, v) + E(u, v)t(u, v)]$, $\bar{f}_1(u, v) = (1+w)^{-2}[(1+w)f(u, v) + F(u, v)t(u, v)]$, $\bar{g}_1(u, v) = (1+w)^{-2}[(1+w)g(u, v) + G(u, v)t(u, v)]$, $\bar{e}_2(u, v) = (1+w)^{-2}E(u, v) = \bar{E}(u, v)$, $\bar{f}_2(u, v) = (1+w)^{-2}F(u, v) = \bar{F}(u, v)$ e $\bar{g}_2(u, v) = (1+w)^{-2}G(u, v) = \bar{G}(u, v)$.

Podemos agora calcular o vetor curvatura média \bar{H} , o qual tem suas componentes dadas por $\bar{H}_1(u, v) = (1+w)H(u, v) + t(u, v)$ e $\bar{H}_2(u, v) = 1, \forall (u, v)$. Como $\bar{H} = \bar{H}_1N_1 + \bar{H}_2N_2$, vem que $\bar{H} = \bar{H}_1N_1 + N_2$ e a elipse de curvatura $\varepsilon_{\bar{\alpha}}(p)$ está degenerada por um segmento de reta sobre a reta suporte $N_2 = 1$, para todo $p \in M$. E ainda, como $\bar{H}(p) \neq 0, \forall p \in M$, as possíveis \bar{H} -singularidades só poderão ocorrer em pontos de inflexão, onde a elipse de curvatura se torna um segmento de reta radial (um ponto, neste caso).

Para simplificar os cálculos, tomamos uma carta (u, v) na qual a primeira forma fundamental de α está diagonalizada, com $E = G = 1$ e $F = 0$. Nesta carta, os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de $\bar{\alpha}$ são $\bar{E}(u, v) = \bar{G}(u, v) = \bar{e}_2(u, v) = \bar{g}_2(u, v) = (1+w)^{-2}$, $\bar{F}(u, v) = \bar{f}_2(u, v) = 0$, $\bar{e}_1(u, v) = (1+w)^{-2}[(1+w)e(u, v) + t(u, v)]$, $\bar{f}_1(u, v) = (1+w)^{-1}f(u, v)$ e $\bar{g}_1(u, v) = (1+w)^{-2}[(1+w)g(u, v) + t(u, v)]$, onde os símbolos sem barra se referem à imersão α . Calculando o vetor curvatura normal de $\bar{\alpha}$, temos

$$K_N = \frac{E(f_1g_2 - f_2g_1) - f(e_1g_2 - e_2g_1) + G(e_1f_2 - e_2f_1)}{2(EG - F^2)} = 0, \forall p \in M,$$

como era esperado, uma vez que ela está associada à área da elipse de curvatura, que neste caso é nula em todos os pontos. A resultante Δ é dada por

$$\Delta(u, v) = -(1+w)^{-6} \left[(f(u, v))^2 + \left(\frac{e(u, v) - g(u, v)}{2} \right)^2 \right].$$

Deste modo, a resultante Δ anula-se nos pontos (u, v) onde $f(u, v) = 0$ e $e(u, v) - g(u, v) = 0$, isto é, nos pontos umbílicos de α . Provamos, assim, o seguinte teorema.

Teorema 1. Com as construções acima, um ponto (u, v) é uma \bar{H} -singularidade de $\bar{\alpha}$ se, e somente se, for um ponto umbílico de α .

No artigo (GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J.), Garcia e Sotomayor provaram a seguinte proposição: Seja $c : [0, l] \rightarrow M$ uma parametrização pelo comprimento de arco de uma curva regular de pontos umbílicos, tal que $\{T, N \wedge T, N\}$ é um referencial positivo de \mathbb{R}^3 . Então a expressão

$$\alpha(u, v) = c(u) + v(N \wedge T)(u) + \left[\frac{1}{2}k(u)v^2 + \frac{1}{6}a(u)v^3 + \frac{1}{24}b(u)v^4 + \dots \right]N(u),$$

onde $k(u) = k_n(c(u), T) = k_n(c(u), N \wedge T)$ é a curvatura normal de M nas direções T e $N \wedge T$, k_g é a curvatura geodésica e τ_g é a torção geodésica da curva c , define uma carta local C^∞ em uma pequena vizinhança tubular de c . Além disso, $\tau_g(u) = 0$. Tendo determinado os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais na carta α , as curvaturas média e Gaussiana e a equação diferencial das linhas de curvatura, provaram a seguinte proposição: Suponha que $\nabla H(u, 0) = (k', a(u)/2)$ não seja zero e um um ponto u_0 . Então as folheações principais próximas ao ponto $c(u_0)$



da curva são como a seguir:

- i) Se $k'(u_0) \neq 0$, então ambas as folheações principais são transversais à curva de pontos umbílicos. Veja Figura 1 esquerda.
- ii) Se $k'(u_0) = 0$, $k''(u_0) \neq 0$ e $a(u_0) \neq 0$, então uma folheação principal tem contato quadrático com a curva c no ponto $c(u_0)$. Veja Figura 1, centro e direita.

Em (MELLO, L.F.), Mello mostrou que as linhas de curvatura principal de α são aplicadas, via (inversa da) projeção estereográfica, nas linhas assintóticas de $\bar{\alpha}$, as quais neste caso são ortogonais e que os pontos umbílicos (singularidades das linhas de curvatura principais de α) são levados nos pontos de inflexão (singularidades das linhas assintóticas de $\bar{\alpha}$).

Em (ROMERO-FUSTER, M.C.; SANCHEZ-BRINGAS, F.), Romero-Fuster e Sanchez-Bringas salientaram que a projeção estereográfica proporciona uma ponte entre o estudo das propriedades das linhas assintóticas e os pontos de inflexão de superfícies em \mathbb{R}^4 e as linhas de curvatura principal e pontos umbílicos das superfícies em \mathbb{R}^3 , pois quaisquer resultados dos primeiros representam uma generalização de problemas similares aos últimos.

Assim, o comportamento das linhas de curvatura principal próximas à curva de pontos umbílicos da carta α apresentada por Garcia e Sotomayor em (GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J.) é análogo ao comportamento das linhas assintóticas próximas à curva de pontos de inflexão de $\bar{\alpha}$, obtida pela aplicação da (inversa da) projeção estereográfica de α em $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Veja Figura 1.

Considerações finais

O exemplo trata de imersões de superfícies em \mathbb{R}^4 com $K_N \equiv 0$, ou seja, com a elipse de curvatura degenerada em um segmento de reta. Neste exemplo, foi feita uma redução da codimensão da imersão, visto que a imagem da superfície pela imersão está contida em uma hipersfera. Uma pergunta natural a ser feita é a seguinte: $K_N \equiv 0$ é suficiente para a garantia da redução da codimensão da imersão? A resposta é não. Uma direção de pesquisa para estudo futuro refere-se à obtenção de um exemplo de uma imersão não hipersférica α de uma superfície regular e orientada em \mathbb{R}^4 , com linhas assintóticas ortogonais globalmente definidas, tendo um ponto de inflexão isolado. Todos os exemplos que aparecem na literatura são de imersões hipersféricas.

Referências bibliográficas

- GARCIA, R.; SOTOMAYOR, J. *On the Patterns of Principal Curvature Lines around a curve of Umbilic Points*, Annals of the Brazilian Academy of Sciences, 77(1) (2005), 13-24.
- LITTLE, J. A. *On singularities of submanifolds of a higher dimensional Euclidean space*, Ann. Mat. Pura Appl. 83 (1969), 261-335.
- MELLO, L.F. *Linhas de curvatura direcional média em superfícies imersas em \mathbb{R}^4* . Tese de Doutorado, USP (2001).
- ROMERO-FUSTER, M.C.; SANCHEZ-BRINGAS, F. *Umbilicity of surfaces with orthogonal asymptotic lines in \mathbb{R}^4* , Differential Geometry and its Applications, 16 (2002), 213-224.

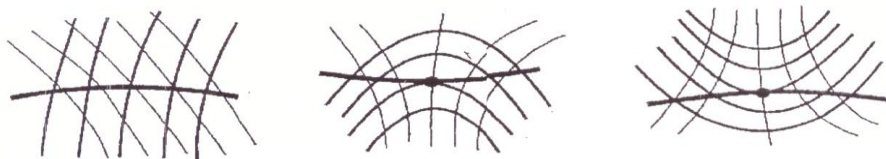


Figura 1. Linhas de curvatura principal próximas a uma curva de pontos umbílicos: caso transversal, esquerda, e caso tangencial, centro e direita.