



Autor(es): NILSON LUIZ CASTELUCIO BRITO, PEDRO HENRIQUE PEREIRA PINHO, JULIANA MIRANDA CORRÊA DE GUAMÁ

Algoritmo para cálculo da distribuição preditiva do número de usuários no sistema em uma fila M/M/1 com abordagem bayesiana

1- Introdução

Para que uma fila seja formada têm-se a entrada de usuários em um determinado ambiente superior à capacidade que esse ambiente tem de atendê-los de forma imediata. As filas podem ser definidas a partir de suas características que podem ser descritas como: o processo de chegada; a capacidade do sistema; o tempo de serviço; o número de servidores; a população de usuários; a disciplina de atendimento. A nomenclatura sugerida por [2], cuja forma é $A/B/c/k/Z$, sugere que A seja a distribuição do tempo entre as chegadas, B a distribuição do tempo de serviço, c o número de servidores, k a capacidade da fila de espera e Z a disciplina de atendimento. O modelo clássico Markoviano descreve uma fila do tipo FIFO, *First In First Out*, com chegada exponencial, M , serviço exponencial, M , 1 servidor para atendimento e capacidade infinita. A otimização de filas auxilia empresas a reduzir custos e melhorar seus serviços de atendimento. O objetivo desse trabalho é apresentar um algoritmo que seja capaz de oferecer o valor da distribuição preditiva, com enfoque bayesiana, do número de clientes de uma fila, sendo ela do tipo $M/M/1$, dispondo-se de dados *a priori* e *a posteriori*.

2- Metodologia

2.1- Filas M/M/1

Presume-se que a fila esteja em equilíbrio e isso implica em ρ , intensidade do tráfego, seja < 1 . Sabendo-se que ρ é uma distribuição de Poisson com taxa de chegada λ e tempo de serviço μ . Matematicamente isso implica que: $\rho < 1 \rightarrow \lambda < \mu$, o que confirma o equilíbrio da fila, caso contrário haveria uma "explosão" do sistema, ou seja, a fila crescerá continuamente em tamanho. Dessa forma, o número de usuários, após o equilíbrio, pode ser calculado pela equação de distribuição de probabilidade geométrica:

$$P(N = n) = p_n = p^n(1 - p), 0 < \rho < 1, n \geq 0, \quad (1)$$

2.2- Inferência Bayesiana

Para fazer inferências sobre ρ , trabalha-se com distribuições *a priori*, $\rho(\theta)$, e a *posteriori*, $\rho(\theta|x)$, sendo eles explicados como: os que são baseados em conhecimentos prévios do comportamento randômico do parâmetro de interesse são dados *a priori* e podem ser tanto subjetivas quanto objetivas; os que são obtidos como amostras através de medições são, portanto, dados *a posteriori*. A distribuição *a posteriori* pode ser descrita como:

$$\pi(\theta|x) = \frac{L(\theta, x)\pi(\theta)}{\pi(x)} = \frac{\pi(x|\theta)\pi(\theta)}{\pi(x)} \quad (2)$$

Tendo em vista a análise de uma amostra do número de usuários no sistema como x_1, \dots, x_n , a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\bar{x}; \rho) = \prod_{i=1}^n (1 - \rho)\rho^{x_i} = (1 - \rho)^n \rho^{\sum_{i=1}^n x_i}. \quad (3)$$

Assumindo que, mesmo que ρ esteja entre 0 e 1, ele esteja mais especificamente entre valores de a e b de tal forma que $0 < a < \rho < b < 1$, então pode-se assumir que a ρ possui uma distribuição uniforme truncada que pode ser descrita como:

$$\pi(\rho) \propto \rho^{a-1}(1 - \rho)^{b-1}, 0 < \rho < 1, a > 0, b > 0.$$

Partindo da combinando das equações (2) e (3), a equação a posteriori pode ser descrita como:



$$\pi_{NC}(\theta|\tilde{x}) = \frac{\Gamma(a + \sum_{i=1}^n x_i + n + b)}{\Gamma(a + \sum_{i=1}^n x_i)\Gamma(n + b)} \theta^{a + \sum_{i=1}^n x_i - 1} (1 - \theta)^{n + b - 1} \quad (4)$$

Pode-se entender então que $\prod NC(\theta|\tilde{x}) \sim Beta(a + \sum_{i=1}^n x_i; n + b)$, portanto têm-se a função de probabilidade $\prod NC$:

$$\pi_{NC}(\rho|dados) = \begin{cases} \frac{1}{B(a + y; n + b)} \rho^{a+y-1} (1 - \rho)^{n+b-1}, & 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5)$$

Com $y = \sum_{i=1}^n x_i$.

Conforme sugere [3] em seu trabalho, tendo $\sum_{i=1}^n x_i$ como sendo amostras randômicas de uma distribuição $f(x|\theta)$ que determinam a taxa de entrada de usuários, os parâmetros a e b como dados *a priori*, então a distribuição preditiva *a posteriori* pode ser descrita como:

$$\pi_{NC}(\rho|dados) = \begin{cases} \frac{B(a + y + m; n + b + 1)}{B(a + y; n + b)} \rho^{a+y-1} (1 - \rho)^{n+b-1}, & 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6)$$

Com $y = \sum_{i=1}^n x_i$.

2.3 Contribuição: cálculo da distribuição

Fazendo:

$$\alpha = a + y, \beta = n + b, B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} \quad (7)$$

Então, pode-se reescrever a equação (6) usando as substituições propostas em (7) para:

$$\frac{\Gamma(\alpha + m)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + m + 1)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (8)$$

Sabendo-se que a função de distribuição $\Gamma(x)$ tem como propriedade: $\Gamma(x) = (x - 1)\Gamma(x - 1)$ e sabendo que $\Gamma(\cdot)$ não assume resultado igual a 0, pode-se desenvolver a equação (8) de forma que:

$$\frac{(\alpha + m - 1)(\alpha + m - 2) \dots (\alpha + m - m)\Gamma(\alpha)\beta\Gamma(\beta)}{(\alpha + \beta + m + 1 - 1)(\alpha + \beta + m + 1 - 2) \dots (\alpha + \beta + m + 1 - m - 1)\Gamma(\alpha + \beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (9)$$

De forma que (9) se torna:

$$\frac{(\alpha + m - 1)(\alpha + m - 2) \dots (\alpha + m - m)\beta}{(\alpha + \beta + m + 1 - 1)(\alpha + \beta + m + 1 - 2) \dots (\alpha + \beta + m + 1 - m - 1)} \quad (10)$$

O algoritmo que descreve o comportamento da função 10 pode ser descrito como:

10^o

FEPEG FÓRUM

ENSINO • PESQUISA
EXTENSÃO • GESTÃO
RESPONSABILIDADE SOCIAL: INDISSOCIABILIDADE
ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA



ISSN 1806-549 X

```
resultado ← 1
for i do ← 1 até i < m + 2 com passo 1
  if i ≠ m + 1 then
    cima ← (α + m - i)
  end if
  baixo ← (α + β + m + 1 - i)
  resultado ← resultado *  $\frac{\text{cima}}{\text{baixo}}$ 
  cima ← 1
end for
resultado = resultado * β
```

A fim de evitar que o valor calculado venha a se tornar um número muito grande na parte superior e muito grande na parte inferior da fração, o que impossibilitaria o cálculo para alguns valores de m , optasse por calcular a divisão da fração a medida que a função vai sendo calculada. Em termos de complexidade em relação ao tempo de execução ele pode ser descrito como um algoritmo de complexidade linear, uma vez que o código se repetirá sempre m vezes, portanto recebe a notação $O(m)$.

3- Resultados

Foi utilizada a linguagem Python para a simulação dos dados. Os parâmetros a priori foram sugeridos por [3] como valores para a distribuição Beta (0.6,1.7), ou seja, têm-se $a = 0,6$ e $b = 1,7$, e da posteriori foram utilizados os parâmetros sugeridos por [5] com $n = 200$, $\sum x_i = 38$. Portanto, obtêm-se para $m = 0, \dots, 5$, os valores descritos na tabela 1.

4- Conclusões e Recomendações

Para calcular a distribuição preditiva através da fórmula verifica-se não ser possível a utilização de calculadora ou de um software devido aos valores que a função $\Gamma(\cdot)$ assume. Com o algoritmo ora apresentado, torna-se possível o cálculo da mesma para quaisquer valores obtidos através de simulações. Como trabalhos futuros, sugere-se a utilização do algoritmo para sistemas de filas mais gerais tais como $M/G/1$, bem como para outros valores de parâmetros.

5- Referências

- [1] Gross, D. & Harris, C.M. *Fundamentals of queueing theory*. John Wiley & Sons 2nd ed., 1985.
- [2] Kendall, D.G. *Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of embedded Markov chains* Annals Mathematical Statistics 24, 1985, 338-354.
- [3] Choudhury, A. & Borthakur, A. C. *Bayesian inference and prediction in the single server Markovian queue* Metrika 67, 2008, 371- 383.
- [4] Cruz, F. R. B. & Almeida, M. *Análise de Desempenho em Filas M/M/1 Usando uma Abordagem Bayesiana* Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, vol. 3,N. 2, 2015.
- [5] Nilson L. C. Brito & Celimar R. A. D. Paiva & Fernanda G. B. Mendes *Uma Aplicação da Abordagem Bayesiana em Teoria de Filas* SINAPE, 2016

Tabela 1. Resultados do algoritmo para valores de $m=0, \dots, 5$, com os valores de: $a=0,6$, $b=1,7$, $n=200$ e $\sum x_i = 38$.

m	Valor
0	0.839367
1	0.134271
2	0.021944
3	0.003662
4	0.000624
5	0.000108